



TITLE:

神経方程式(I)

AUTHOR(S):

大貫, 信

---

CITATION:

大貫, 信. 神経方程式(I). 物性研究 1970, 14(3): 220-231

ISSUE DATE:

1970-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/88113>

RIGHT:

# 神 經 方 程 式 (I)

早大理工 大 貫 信

(5月21日受理)

## § 1. 序 論

神経系の活動の物質に依拠するミクロな化学反応を抽象した生理的機能表現する為にその数学形式を考察することは、脳のソフトウェアとしての機能にミクロなレベルから近付こうとする際に必要である。この立場の根拠となつてゐる思想は、脳は基本的な素子の集合であり、その集合構造特性に立脚した空間で行なわれる情報交換・時空間写像の機能が心理現象をあらわすであろうということである。心理学として考察される脳はその用語で判るように物質から切り離されたソフトウェアである。一方脳生理学は物質的根拠を求めるハードウェア指向である。このハードウェア研究とソフトウェア的表現との断絶は著しい。この断絶の下にあつて脳の研究は種々のレベルから行なわれなければならない。そしてミクロなハードウェア研究から、マクロなソフトウェア現象への道筋の開発は、当然そのある時点で一度ハードウェア現象を抽象したソフトウェア表現への転換を必要とする。逆に心理学から下ろうとすればそのソフトウェア表現をある程度普遍的な形式である数学に乗せて数理心理学用語の開発が行なわれる。そうしてハードウェア研究から材料用語を切り落したソフトウェア的数学形式と数理心理学的表現との接点を求めることによつて断絶を埋める用語体系が開発されなければならない。その開発されることを待つてゐる用語体系を仮に“脳の数学形式”と呼べば、このアプローチ形式は Fig. 1 のようになる。このアプローチ形式が無用であるときめつけるのは易しいが有用であると主張することは難しい。何故ならば末だ開発の途上にある分野であり、問題の解決よりも問題の発見、用語及び概念形式の段階にあるからである。しかしその必需性を推察することは出来る。何故ならば、脳の機能はその物質的根拠に依存しながらも、それ以上の抽象化された“情報”によつて発現するからである。その根拠は主として電気生理学的実験が支えてきた。脳の機能は、外界の事象をパルスという抽象化された形式に変換し、情報空間として発現する

ことによつて物質反応系が高次のソフトウェア系に質的変容を遂げたものと見なせるからである。それ故物質以上に哲学化され得て観念を作成、処理できるようになつた存在である。

脳の数学形式の研究は、それ故電気生理的実験に基づく抽象化された情報即ちパルスの処理に関する形式の表現から始まつた。それは主としてバイオニクスとして発展した。数学形式は常に神経に関する概念の探求と密着している。数学形式と概念との切り離せない関係の中で、種々の試みがなされた。<sup>1)</sup> それでもなお未だ概念形成 (Concept Formulation) 段階にある。それ故インタディシプリナリー (学際) 研究が必要であるが、集団の素子のあらわす情報処理形式に於ける概念に、統計力学分野の概念が有用かも知れない。そのような観点に立つて物性研究 vol. 13, no. 3 ~ 5 を試みた。それに対して、未だ物質としての脳にのみ執着したがる人々から、ソフトウェア的な形式の議論について方法論としての批判を受けた。また別の関心を寄せる人々からは具体的な問題呈示の要求を受けた。前者の批判は常にそうであるが、物理にハードウェア物理とソフトウェア物理があることを忘れた誤診によるもので、時空間の数学形式についてのソフトウェア研究が常に物理表現の命題の一つであることを忘れてしまつた今日の状況に埋没した意見であるので、序論でそのアプローチ形式を述べた次第である。後者の建設的批判はもつともである。例えば、この分野に於ける問題について文献 2) をあげておいた。しかし、問題はそれにとどまらないが、明確化できない。何故なら、微分方程式の解を求めて終りという類の問題にまで煮つめられていないからである。問題発見と概念形成を待つ未知の空洞である。従つて問題発見と解決が常に同時に行なわれつつある分野で 5 ~ 10 年を経て厳密解を待つという問題は未だ存在しない。そこで一般的に語るとソフトウェア概念を求めると語らざるを得ない。

更に物性研究 vol. 13, no. 3 は説明不足であるとのお叱りを受けたので、ここでは神経方程式という名に耳慣れない方々の為にも少し詳しく記述することを心がけた。

## § 2. 神経素子の非線型機能

神経素子を信号伝達という点で抽象化すると高度の非線型性を持つ。その信

号伝達の特性の代表的なものは

1. 空間加重      2. 伝達特異性 (発火の特異性)      3. 絶体閾値, 非加重力
4. 伝達時間      5. 時間加重      6. 履歴      7. 絶対不応期
8. 消却      9. PSP連続性, 時間的減衰。

神経空間は, 物質空間が物質およびエネルギー伝達の空間であるのに比して, 情報信号伝達の空間であることが特徴であり, それによつて始めて物質空間が情報空間に質的変容を遂げ得たものである。その場合, ある細胞体に軸索, 樹状突起そしてシナプスを経て伝えられた信号はその総和がある絶対閾値 ( $T$ ) 以上になつて始めてその細胞体は発火しパルスを発生し信号を他細胞体に伝える (Fig. 2)。

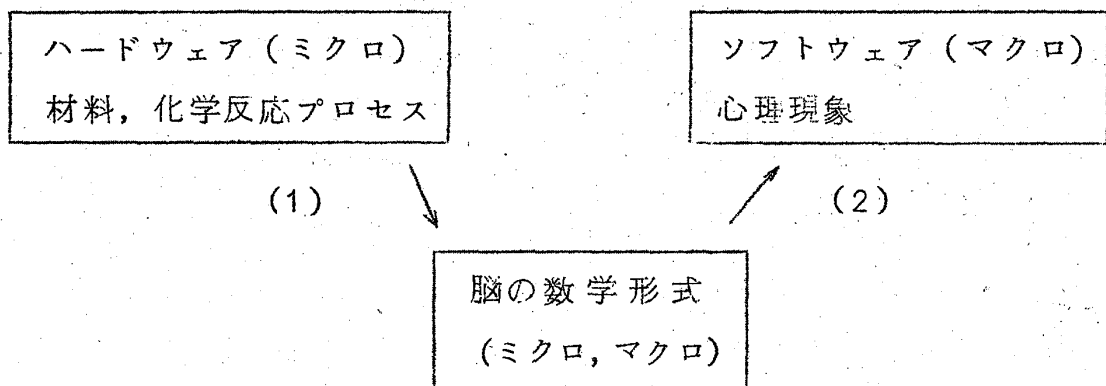


Fig. 1

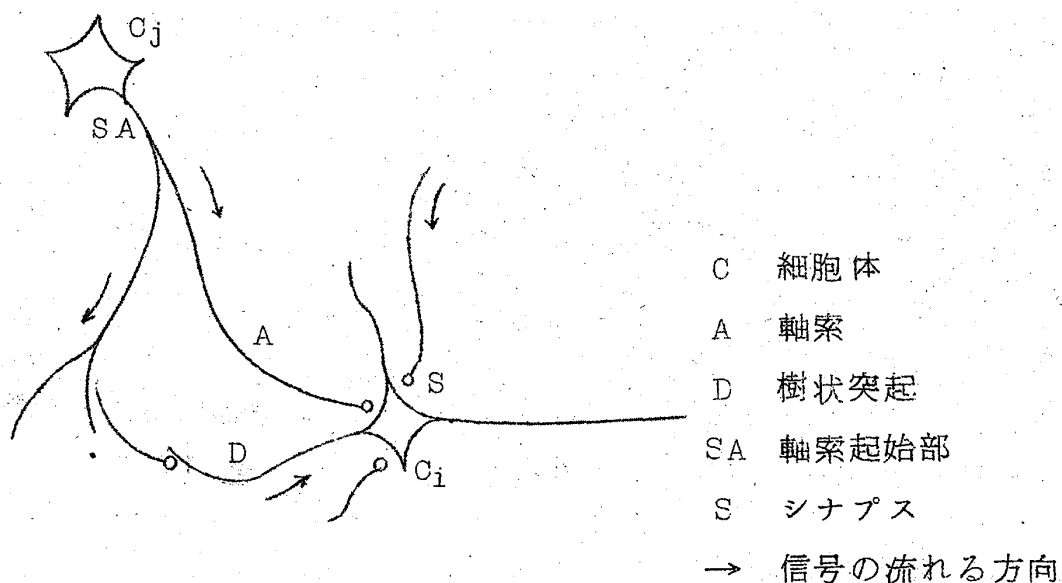


Fig. 2 ニューロン

細胞体を信号伝達の旗手にたとえるとこのような発火の特異性は伝達の特異性とも云える。細胞体の状態は発火している ( $\sigma_i = 1$ ) かしていないか ( $\sigma_i = 0$ ) の2状態が考えられる故、これがイージングスピンとしてモデル化されるのではなかろうかという考えがあつて当然であるが、イージングスピン系に比してより高度の非線型効果を持つ故にこのモデル化はまだ成功していない。さまざまな無視を行なえば一次近似としてはイージングスピン系と出来るが、それを包含したより高度の特徴としてどのような力学系が構成されるかが問題となる。その基礎づけとして、ここで神経空間にまつわる数学形式について少し突っ込んだ議論をする。1~3の機能は次のようにあらわされる (McCulloch, Pitts, 1943)。

$$\sigma_i(t) = \theta \left[ \sum_{j \neq i} a_{ij} \sigma_j(t) - T_i \right] \quad (2.1)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ここで

$$\sigma(t) = \theta [\nu(t)] \quad (2.2)$$

とすれば上式は

$$\nu_i(t) = \sum_{j \neq i} a_{ij} \sigma_j(t) - T_i$$

と等価であり (2.2) は伝達特異性 (発火特異性) をあらわす。細胞体の発火によつて生じたパルスは軸索に沿つてシナプスに伝わり、シナプスで  $\tau$  時間後に後シナプス電位 (PSP) となつてあらわれる。それは直接に細胞体に伝わり、ある場合には樹状突起を経て細胞体に伝わり、軸索起始部の電位の上昇に寄与する。細胞体の発火から軸索起始部までの伝達時間をシナプス滞在時間  $\tau$  とその他の時間  $\tau'_{ij}$  の和として考えると (2.1) は

$$\sigma_i(t+\tau) = \theta \left[ \sum_{j \neq i} a_{ij} \sigma_j(t-\tau'_{ij}) - T_i \right] \quad (2.3)$$

となる。細胞体に到達した信号は、その発火を持たらずに到らない場合はそこ

に蓄積される。それ故信号の時間加重効果があらわれ (2.3) は、機能 7 (後述) を  $Th_i$  として

$$\sigma_i(t+\tau) = \theta \left[ \sum_{j \neq i} \sum_{r=0}^L a_{ij}^{(r)} \sigma_j(t-\tau_{ij} - r\tau) - T_i Th_i(t) \right] \quad (2.4)$$

となるが、ここで時間は間隔  $\tau$  で離散的にはかられるとし、すべての細胞体の発火不発火がこの離散的時間で同期していると仮定された。さらに信号がシナプスを通過することによつてシナプス伝達の効果が変わるという履歴を考えて相互作用  $a_{ij}$  は  $r$  の関数とされる (Caianiello, 1961)。

神経空間について離散的時間空間とした仮定が正当であるかどうかは重要な問題である。この問題は又、 $\sigma$  が発火の特異性故に、時間微分不可能である事と関連している。時間微分不可能である為に、離散的時間の導入を余儀なくされる。そこで離散時間を  $\tau$  とせず微少時間  $\Delta t$  におしとどめておく。又、時間加重を (2.4) の形式でなく、別の形式であらわすことによつて、以後の展開をより容易にする。 $\nu_i$  についての表現で記述すると

$$\nu_i(t+\Delta t) = b(\Delta t) \nu_i(t) + \sum_{j \neq i} a_{ij}(t) \sigma_j(t-\tau_{ij}) - T_i \quad (2.5)$$

第 1 項は時間加重を示し、更に細胞体に到達した電位は P S P として正確には時間的に減衰する (機能 9 の後半) 故に  $\Delta t$  間隔の減衰を  $b(\Delta t)$  とする。

$\Delta t \ll 1$  に対して緩和時間を  $\tau_i$  とすると

$$b(\Delta t) \simeq 1 - \frac{1}{\tau_i} \Delta t \quad (2.6)$$

でよい。

細胞体が発火するとそれまで蓄積された信号は消却され、時間加重はその時点で 0 に帰するから、(2.5) は

$$\begin{aligned} \nu_i(t+\Delta t) = & b(\Delta t) \nu_i(t)(1-\sigma_i(t)) + \sum_{j \neq i} a_{ij}(t) \sigma_j(t-\tau_{ij}) \\ & - T_i + b(\Delta t)(1-\sigma_i(t)) + Th_i(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

と改良される。右辺第 4 項は、絶対閾値は細胞体電位に与えられる一種の力で

大貫 信

あるが、他細胞体からの刺激と異なつて時間加重されず、常に一定の力として加わっている非加重力であるから、右辺第一項によつて余分に付加される  $T_i$  の効果を打消すために加えられたもので、絶対閾値の非加重効果をあらわしている。

細胞体は一度発火すると定常状態に戻るのに時間（約1m sec）がかかり、その間にどのように刺激が来ても発火しない絶対不応期がある。この効果は絶対不応期（ $\tau_0$ ）の間は、非常に大きい負の閾値（ $-L$ ）が加わると見なすことができるので、その効果を  $T_h$  として

$$Th_i(t) = \sum_{r=0} a_{ii}^{(r)} \sigma_i(t-r\tau) \quad (2.8)$$

$$a_{ii}^{(r)} = \begin{cases} -L_i & \text{for } 0 < r\tau \leq \tau_0 \\ L_i' & \text{for } \tau_0 < r\tau \leq \tau' \\ 0 & \text{for } \tau' < r\tau \end{cases}$$

とあらわすことができる（Caianiello, 1961）。 $a_{ii}^{(r)}$  の2列目の効果は、絶対不応期の後に続く相対不応期（Fig. 3）を考慮したものである。

この表現は積分核を用いて、 $\tau \ll 1$

として

$$Th_i(t) = -\int_0^\infty K_i(t-s) \sigma_i(s) ds \quad (2.9)$$

としてもよい（Caianiello, 1966）。

細胞体発火に伴う絶対不応期の化学反応プロセスについては未だ定説はないが、抽象化して、発火によつて状態の変化を来すと一般化することが出来る。

相対不応期を無視すると、発火と同時に抽象的な量  $W_i$  が  $X$ （負値）になり、次第に増加して  $\tau_0$  後に0に帰すると考え、 $W_i$  の時間変化を

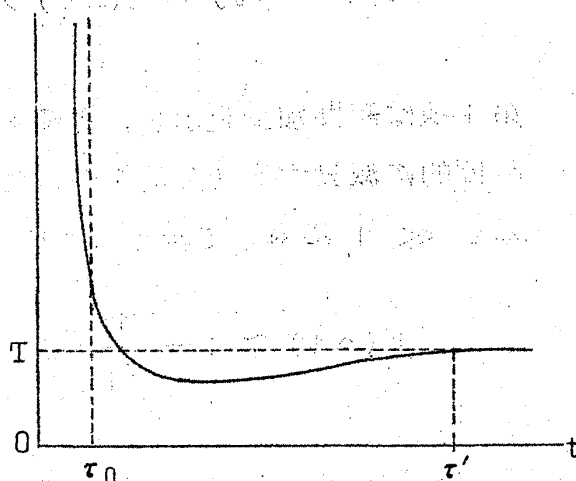


Fig. 3 閾値の時間変化

$$W_i(t+\Delta t) = (W_i(t) + \Delta) (1 - \theta(W_i(t))) + X \sigma_i(t) \quad (2.10)$$

とし,

$$Th_i(t) = -L(1 - \theta(W_i(t))) \quad (2.11)$$

とあらわすことも出来る。(2.9) は絶対不応期にまつわる細胞体のミクロな変化過程を抽象量  $W$  に map したもので一般的な表式である。

### § 3. PSP 連続性

細胞体の発火は、デジタルである。しかしその効果が他細胞に伝えられる直前でシナプスに於て PSP に変換される。PSP の時間変化は Fig. 4 に示すように時間的になめらかである。シナプスでデジタル

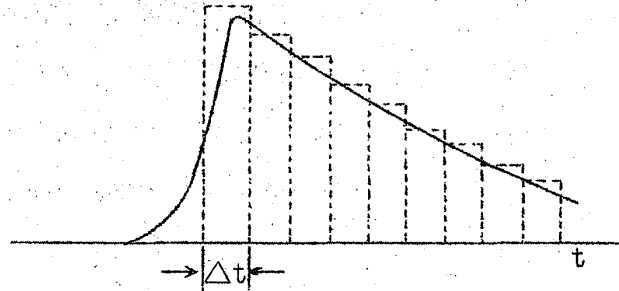


Fig. 4 PSP の時間変化

信号はアナログ信号に変換されると考えられる。脳のマクロな現象としての機能はデジタルというよりアナログ的である。そうしたアナログ性がミクロなデジタルプロセスから如何にして持たられるかという問題が、ミクロプロセスの数式化 (2.1), (2.4) の発表後提起された。その起因をミクロなプロセスでの PSP のアナログ性に帰着しようというアイデアが生れた (その例は神経方程式 (II) で述べる)。しかし、まともにこの問題にぶつかると、発火にまつわるデジタル性はやはり無視出来ない。(2.4) は発火のデジタル性は取り込んであるが、PSP 連続性については Fig. 4 (点線) の如く巾  $\tau$  のパルスでデジタル化してしまつたことになる。そこで、PSP 連続性を生かすために、パルス巾を縮めて  $\Delta t$  として positive であるが、非常に小さい値をとらせれば (その可能性は後で否定される) その極限でアナログ性を取り込めるのではなかろうかと考えられる、§ 2 はそうしたことから、機能 1 ~ 9 を (2.7), (2.9) 又は (2.11) であらわすことにした。

### § 4. 離散時間の評価

1 ケの細胞体に着目すると絶対不応期がある為にパルス振動数は  $2\pi/\tau_0$  以



上にはなり得ない。従つて細胞体はパルス振動数について帯域巾  $2\pi/\tau_0$  のフィルターと考えられる。このことが直ちに全体の空間を離散時間とする理由にはならない。全体の空間についての時間構造を評価する為には、集団ではアンサンブル平均が most dominant になると考えると、アンサンブル平均を物理量とする空間での離散時間を評価することを試みる。その際、絶対不応期がアンサンブル平均の時間の離散化に及ぼす影響を考察する。

絶対不応期における状態変化を記述する (2.10) で、 $W_i$  は  $X = X_1, X_2, X_3, \dots, X_N = 0$  の離散的ステップをとるとし、時刻  $t$  に  $W_i = X_k$  である確率  $f(X_k; t)$  によつてアンサンブル平均は、 $\tau_0'$  を  $X_1 \rightarrow X_N$  への移行の時間とすると (4.18) が成立する、

$$\langle W_i(t) \rangle = \sum_{k=1}^N X_k f(X_k; t) \quad (4.1)$$

$$(N-1) \Delta = -X$$

$$(N-1) \Delta t = \tau_0'$$

となる。(2.10) の stochastic process について注意を要する。 $W_i$  は仮に導入された量であつて、一度発火すると決定論的にこのプロセスを経過するのであつて、 $W_i$  の統計性は発火するか否か、即ち  $\sigma_i$  の統計性によつてゐる。従つて

$$f(X_{k+1}; t+\Delta t) = f(X_k; t) \quad (4.2)$$

$$f(X_1; t+\Delta) = \langle \sigma_i(t) \rangle \quad (4.3)$$

がなりたつ。(4.3) 右辺は  $\sigma_i = 1$  又は 0 であるから  $\sigma_i = 1$  になる確率でもある。

(4.1), (4.2), (4.3) を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N X_k f(X_k; t+\Delta t) &= \sum_{k=1}^{N-1} (X_k + \Delta) f(X_k; t) \\ &+ X \langle \sigma_i(t) \rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここでステップを変位する速さ

$$v = \frac{\Delta}{\Delta t}$$

を導入し,

$$v = -\frac{X}{\tau_0'} \quad (4.5)$$

で,  $X_1$  になつてからの経過時間  $s$  を用いて

$$\eta \equiv vs + X \quad (4.6)$$

とし,  $f(X_k; t)$  をなめらかな函数  $p(\eta; t)$  で

$$\int_{X_k - \frac{\Delta}{2}}^{X_k + \frac{\Delta}{2}} p(\eta; t) d\eta = f(X_k; t) \quad (4.7)$$

とあらわすことにすると (4.2), (4.3) は

$$p(\eta; t) = p(X_1; t-s)$$

$$p(X_1; t) \Delta = \langle \sigma_i(t-\Delta t) \rangle \quad (4.8)$$

, (4.4) は

$$\langle \eta(t+\Delta t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle + \int_X^0 p(\eta; t) \Delta d\eta + X \langle \sigma_i(t) \rangle \quad (4.9)$$

(4.5) (4.6) (4.8) を用いると

$$\int_X^0 p(\eta; t) \Delta d\eta = -\frac{X}{\tau_0'} \int_0^{\tau_0'} \langle \sigma_i(t-s) \rangle ds$$

であるから (4.9) は

$$\begin{aligned} \langle \eta(t+\Delta t) \rangle - \langle \eta(t) \rangle &= -\frac{X}{\tau_0'} \int_0^{\tau_0'} \langle \sigma_i(t-s\Delta t) \rangle ds \\ &\quad + X \langle \sigma_i(t) \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\langle \eta(t+\Delta t) \rangle \sim \langle \eta(t) \rangle + \Delta t \frac{d}{dt} \langle \eta(t) \rangle$$

$$\langle \eta_i(t+\Delta t) \rangle \sim \langle \sigma_i(t) \rangle + \Delta t \frac{d}{dt} \langle \sigma_i(t) \rangle$$

で近似すると (4.10) は

$$\begin{aligned} \Delta t \frac{d}{dt} \frac{\langle \eta(t) \rangle}{X} &= \langle \sigma_i(t) \rangle - \frac{1}{\tau_0'} \int_0^{\tau_0'} \langle \sigma_i(t-s) \rangle ds \\ &+ \frac{\Delta t}{\tau_0'} \int_0^{\tau_0'} \frac{d}{dt} \langle \sigma_i(t-s) \rangle ds \end{aligned} \quad (4.11)$$

或いは時間微分して

$$\begin{aligned} \Delta t \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \frac{\langle \eta(t) \rangle}{X} - \frac{1}{\tau_0'} \left( \frac{d}{dt} \langle \sigma_i(t) \rangle - \frac{d}{dt} \langle \sigma_i(t-\tau_0') \rangle \right) \right\} \\ = \frac{d}{dt} \langle \sigma_i(t) \rangle - \frac{1}{\tau_0'} (\langle \sigma_i(t) \rangle - \langle \sigma_i(t-\tau_0') \rangle) \end{aligned} \quad (4.12)$$

ここで  $\Delta t \rightarrow 0$  とすると  $\langle \sigma_i(t) \rangle$  は振動しなくなる。Rodieck らの猫の蝸牛神経核の自発放電の観察はパルス間隔が poisson 又は gauss 分布することを示している。<sup>3)</sup> 従つて  $\langle \sigma_i(t) \rangle$  の振動を許す為には  $\Delta t$  は positive でなければならない。(4.12) の Fourier 積分から、 $\frac{\langle \eta(t) \rangle}{X}$  も  $\langle \sigma_i(t) \rangle$  と同じ振動数を持つから、

$$\begin{aligned} i\omega\tau_0' - (1 - \exp(-i\omega\tau_0')) \\ = \Delta t \{ -i\omega(1 - \exp(-i\omega\tau_0')) - \omega^2\tau_0' A(\omega) \} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\text{但し } A(\omega) = \frac{\langle \eta(\omega) \rangle}{X} / \langle \sigma_i(\omega) \rangle \quad (4.14)$$

$|A(\omega)| \leq 1$  であるから (4.13) より

$$\Delta_2(\omega) > \Delta t > \Delta_1(\omega) \quad (4.15)$$

但し

$$\Delta_1(\omega) = \frac{\sqrt{(1 - \cos \omega \tau_0')^2 + (\omega \tau_0' - \sin \omega \tau_0')^2}}{\omega \{ \sqrt{(1 - \cos \omega \tau_0')^2 + \sin^2 \omega \tau_0'} + \omega \tau_0' \}} \quad (4.16)$$

$$\Delta_2(\omega) = \frac{\sqrt{(1 - \cos \omega \tau_0')^2 + (\omega \tau_0' - \sin \omega \tau_0')^2}}{\omega \{ \sqrt{(1 - \cos \omega \tau_0')^2 + \sin^2 \omega \tau_0'} - \omega \tau_0' \}} \quad (4.17)$$

$\omega \tau_0'$  が  $0 \sim \frac{1}{2} \pi$  の範囲では,  $\Delta t$  は  $\frac{\tau_0'}{4} \sim 5 \tau_0'$  であり

$$\tau_0' + \Delta t = \tau_0 \quad (4.18)$$

を用いると,  $\Delta t$  は  $\frac{1}{6} \tau_0 \sim \frac{4}{5} \tau_0$  である。即ち  $\langle \sigma_i(t) \rangle$  に 0~数百サイクル/秒の振動を許すには  $\Delta t$  は  $\frac{1}{6} \tau_0 \sim \frac{4}{5} \tau_0$  の間のいずれかの値をとらねばならない。

以上のことから PSP 連続性というミクロねアナログ性を示唆する現象があるにも拘らず, やはり神経空間は  $\Delta t$  の離散的時間空間構造をしている。 $\Delta t$  のこの巾は, 細胞体の発火に伴う電位変化をパルスであらわすとした場合の巾として適切である (Fig. 5)。理想状

態として発火の電位変化はパルスと考えるのがよい。生体物質が実はパルスを正確に作りたかつたにも拘らず生体物質の宿命としてダラダラしたものになつてしまつたと考えられる。このように生物系の理論化に於ては, 理想状態が何であるかを明確にする必要がある。理論は常に

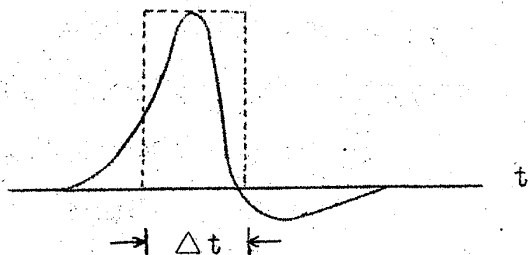


Fig. 5 スパイクポテンシャル

抽象化を追うものであるが, その際に無視すべきダラダラさを明らかにしなければならない。このことは特に生物系を扱う時に留意するべき点である。一般的に云つて, あるダラダラさをなくす方向に進むことは可能なこともあるが, 逆ににつきりしたものをダラダラしたものとみなして理論化してはならない (特異指向の概念)。PSP も一見アナログに見えるがやはり  $\Delta t$  巾のパルス

大貫 信

のみとみなした方がよいことが判る。離散時間に伴う困難は先に述べたようにそれが同期性の仮定を生むということである。それを避ける為に、 $\Delta t$ を時間の不確定さとみなすとよいであろう。即ち(2.7)での $\sigma_j$ は $\Delta t$ の中での入力として $\Delta t$ 巾の時間平均的なものとみなせば同期性の仮定から逃れることが出来よう。この $\Delta t$ は従つて time tolerance とみなすことが出来る。神経空間は、細胞が離散的に分布しているという spatial tolerance の他に time tolerance のある空間と考える。

PSP連続性をマクロな現象に於けるアナログ性のミクロなレベルでの保証とする考えは、従つて直ちには認められない。決定論的方程式(2.7)でけやはり、 $\Delta t$ は時間のミクロな不確さを示す解釈しても、その微分不可能性は残る。そこでマクロなアナログ性に到達するには、一つの考えとして統計性を導入することが考えられる。この思考の延長は神経方程式(II)で述べられる。

## 文 献

- 1) 大貫 信；神経方程式，数理科学，1970年7月号掲載予定
- 2) a. 「神経の生物物理」生物物理学講座，日本生物物理学会編，吉岡書店 1966  
b. 「数理心理学」講座心理学，印東太郎編，東大出版会，1969  
c. 鈴木良次；脳のモデルと記憶，応用物理38巻11号(1969)  
d. Neural Theory and Modeling, ed. R.F.Reiss, Stanford Univ. Press, 1964  
e. the Future of the Brain Sciences, ed. S.Bogoch, Plenum Press, 1969
- 3) R.W.Rodieck, N.Y-S.Kiang and G.L.Gerstein  
; Biophys. J., 2 (1962) 351